On periodic β-expansions of Pisot numbers and Rauzy fractals (Analytic Number Theory and Related Topics)

数理解析研究所講究録
1160巻 2000年 186-193

On periodic β-expansions of Pisot numbers and Rauzy fractals

佐野 友紀 (Yuki Sano)　　伊藤 俊次 (Shunji Ito)

(津田塾大学・情報数理)

1999年 12月2日 木曜日

概 要

ある特別な d 次元 Pisot 数を基数としてもつ β 展開が純周期をもつことの必要十分条件を示した。reduced という概念を導入し、フラクタル境界をもつ領域を構成することが証明のポイントとなる。

1 Introduction

実数 $\beta > 1$ に対して、単位区間 $[0,1)$ 上の β-変換 T_β を次のように定義する:

$$T_\beta x = \beta x - [\beta x]$$

ここで、$[x]$ は x の整数部分を表すとする。その時、任意の $x \in [0,1)$ は

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \beta^{-k},\ b_k = [\beta T_\beta^{k-1} x]$$

と表すことができる。この β を基数として持つ x の展開を β 展開と呼ぶ。この展開は通常の二進法や十進法の拡張である。また、簡単のために

$$x = .b_1 b_2 \ldots$$

で表すことにする。

実数 $x \in [0,1)$ が周期的な β 展開を持つとは、ある正の整数 m が存在して、

$$x = .b_1b_2\ldots b_m(b_{m+1}b_{m+2}\ldots b_{m+p})^\infty$$

と表せるときに言う。特に、$m=0$ をとることができるときは、x は純周期的な β 展開を持つと言う。つまりそのときは、

$$x = .(b_1b_2\ldots b_p)^\infty$$

と表される。

Bertrand 先生 [3] と K. Schmidt 先生 [7] は周期的な β 展開について研究した。ここで、Pisot 数とは、1 よりも大きい代数的整数でその共役数達が 1 よりも小さい絶対値を持つ数のことである。

Theorem (Bertrand, K. Schmidt) . β を *Pisot* 数とする。x を $[0,1)$ 区間上の実数とする。その時、x が周期的な β 展開を持つことの必要十分条件は $x \in \mathbb{Q}(\beta)$ である。

秋山先生は [1] において、β が次の条件 (F) を満たす場合の純周期性の十分条件を示した。

(F) 全ての正な $x \in \mathbb{Z}[\beta]$ は有限な β 展開を持つ。

Theorem (Akiyama) . β を *Pisot* 単数（*Pisot* 数かつ単数である代数的整数のこと）とする。この時、β が条件 *(F)* を満たすならば、ある正数 c が存在して閉区間 $[0,c]$ の任意の有理数は純周期的な β 展開を持つ。

我々は [4] において、次の既約多項式を満たす 3 次の Pisot 数 β による β 展開の純周期性の必要十分条件を示した：

$$Irr(\beta) = x^3 - k_1x^2 - k_2x - 1, \quad k_1(\neq 0), k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ and } k_1 \geq k_2$$

また、著者の一人は [6] において、この結果の一般化を行った。ここからは、$\beta(>1)$ を次の既約多項式の正の根とする：

$$Irr(\beta) = x^d - k_1x^{d-1} - k_2x^{d-2} - \cdots - k_{d-1}x - 1,$$
$$k_i \in \mathbb{Z}, \text{ and } k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_{d-1} \geq 1.$$

この時、β は Pisot 数で条件 (F) を満たすことは知られている。ここで、β の代数的共役数を次のように表す $(r_1 + 2r_2 = d)$:

$$\beta = \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(r_1)}$$

を実共役数とし、複素共役数については、

$$\beta^{(r_1+1)}, \overline{\beta^{(r_1+1)}}, \beta^{(r_1+2)}, \overline{\beta^{(r_1+2)}}, \dots, \beta^{(r_1+r_2)}, \overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$$

と表す。また、$x \in \mathbb{Q}(\beta)$ についても同様に

$$x = x^{(1)}, \dots, x^{(r_1)}, x^{(r_1+1)}, \overline{x^{(r_1+1)}}, \dots, x^{(r_1+r_2)}, \overline{x^{(r_1+r_2)}}$$

と表す。そして、次の結果を得ることができる。

Main Theorem . $x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$ とする。この時、x が純周期的な β 展開をもつことの必要十分条件は ωx が *reduced* となることである。

ここで、ω は β のみに依存する $\mathbb{Q}(\beta)$ の元である。本稿においては、β 変換の natural extension を導入し、reduced の概念について紹介したいと思う。詳しい証明は、[4] または [6] を参照して下さい。

2 Substitution Dynamical Systems

β は次の既約な行列の Perron 固有値になっていることが分かる：

$$M = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{d-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで σ をアルファベット $\{1, 2, \dots, d\}$ 上の substitution

$$\begin{aligned} \sigma: \quad 1 &\to \underbrace{1\dots1}_{k_1}\,2 \\ 2 &\to \underbrace{1\dots1}_{k_2}\,3 \\ &\dots \\ d-1 &\to \underbrace{1\dots1}_{k_{d-1}}\,d \\ d &\to 1 \end{aligned}$$

とすると、この substitution σ から abelianization によって得られる $\mathbb{Z}^d$ 上の線形写像は行列 M で与えられることが分かる。

Rauzy 先生は [5] で、最小多項式が $Irr(\beta) = x^3 - x^2 - x - 1$ $(k_1 = k_2 = 1)$ となる Pisot 数 β によって、Rauzy fractal と一般的には呼ばれるフラクタル境界を持つコンパクトな領域を構成した。Arnoux 先生と伊藤先生は [2] において、任意の Pisot substitution（対応する行列 M の固有値が Pisot 数となっている）に対して、同様にしてフラクタル境界を持つコンパクトな領域 $X(\subset \mathbb{R}^{d-1})$ が構成できることを示した。

この閉領域 X は

$$X = \bigcup_{i=1}^{d} X_i$$

と d 個の領域に分けられ、各々の X_i は測度 0 の部分を除いて互いに素である。また、X_i も次のように分解される：

$$\begin{cases} X_1 &= \bigcup_{i_1=0}^{k_1-1} (RX_1 - i_1\mathbf{v}) \cdots \bigcup_{i_{d-1}=0}^{k_{d-1}-1} (RX_{d-1} - i_{d-1}\mathbf{v}) \cup RX_d \\ X_2 &= RX_1 - k_1\mathbf{v} \\ &\vdots \\ X_d &= RX_{d-1} - k_{d-1}\mathbf{v} \end{cases}$$

よって、領域 X に分割

$$X = \bigcup_{i=1}^{d} X_i = \bigcup_{i_1=0}^{k_1} (RX_1 - i_1\mathbf{v}) \cdots \bigcup_{i_{d-1}=0}^{k_{d-1}} (RX_{d-1} - i_{d-1}\mathbf{v}) \cup RX_d$$

を構成することができた。

ここで、$\mathbf{v}$ は $\mathbb{R}^{d-1}$ 上のベクトル

$$\mathbf{v} = {}^t[\omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(r_1)}, 2\Re\omega^{(r_1+1)}, 2\Im\omega^{(r_1+1)}, \ldots, 2\Re\omega^{(r_1+r_2)}, 2\Im\omega^{(r_1+r_2)}]$$

で、R は $\mathbb{R}^{d-1}$ 上の変換

$$R = \begin{bmatrix} \beta^{(2)} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta^{(r_1)} \end{bmatrix} \oplus$$

$$\begin{bmatrix} \Re\beta^{(r_1+1)} & -\Im\beta^{(r_1+1)} \\ \Im\beta^{(r_1+1)} & \Re\beta^{(r_1+1)} \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} \Re\beta^{(r_1+r_2)} & -\Im\beta^{(r_1+r_2)} \\ \Im\beta^{(r_1+r_2)} & \Re\beta^{(r_1+r_2)} \end{bmatrix}$$

である。また、$A \oplus B$ は $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}$ を意味する。

この領域 X から d 次元領域

$$Y = \bigcup_{i=1}^{d} Y_i (\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$$

を以下のように構成する：

$$\begin{aligned} Y_1 &= \omega[0,1) \times X_1 \\ Y_2 &= \omega[0, T_\beta 1) \times X_2 \\ Y_3 &= \omega[0, T_\beta^2 1) \times X_3 \\ &\vdots \\ Y_d &= \omega[0, T_\beta^{d-1} 1) \times X_d \end{aligned}$$

ここで、$T_\beta 1$ は 1 に β 変換を施したもので、

$$\begin{aligned} 1 &= .k_1 k_2 \ldots k_{d-1} 1 \\ T_\beta 1 &= .k_2 \ldots k_{d-1} 1 \\ T_\beta^2 1 &= .k_3 \ldots k_{d-1} 1 \\ &\vdots \\ T_\beta^{d-1} 1 &= .1 = \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

で与えられることが分かる。

X 上の分割を利用して、領域 $Y = \bigcup_{i=1}^{d} Y_i (\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$ 上に β 変換の natural extension S_β を定義することができる：

$$S_\beta(\omega x, \mathbf{x}) := (\omega(\beta x - [\beta x]), R\mathbf{x} - [\beta x]\mathbf{v}), \quad x \in [0,1)$$

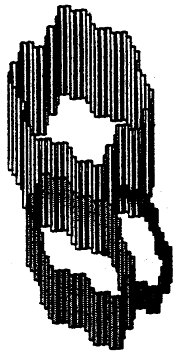

図 1: Rauzy フラクタルの場合 $(k_1 = k_2 = 1)$ の領域 Y

第一座標の作用は単なる β 変換 T_β に他ならない。また、S_β の定義の仕方から、容易に次の結果を得る。この意味で、S_β は T_β の natural extension と言うことができる。

Proposition 1. S_β は全射で、境界部分を除いて単射である。

3 Reduction Theorem

写像 $\rho : \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ を

$$\rho(x) = \left(x, \begin{bmatrix} x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(r_1)} \\ 2\Re x^{(r_1+1)} \\ 2\Im x^{(r_1+1)} \\ \vdots \\ 2\Re x^{(r_1+r_2)} \\ 2\Im x^{(r_1+r_2)} \end{bmatrix} \right)$$

とし、reduced を以下のように定義する。

Definition 1. 実数 $x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$ が reduced であるとは、$\rho(\omega x) \in Y$ であるときに言う。

簡単な計算により、次の結果を得る。

Lemma 2. $x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$ とする。この時、次の等式が成り立つ：

$$S_\beta(\rho(\omega x)) = \rho(\omega \cdot T_\beta x)$$

この結果を使って、主定理の証明のキーとなる次の結果が導かれる。

Lemma 3. $x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$ を *reduced* とする。この時、

1. $T_\beta x$ も *reduced* であり、
2. $T_\beta x^* = x$ を満たすある *reduced* な元 x^* が存在する。

この結果の 2. と領域 Y が有界であることから、β 展開の純周期性の十分条件を得る。

Proposition 4. $x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$ を *reduced* とする。この時、x は純周期的な β 展開を持つ。

また、β 変換を何回も施していけばいずれは領域 Y に入ってしまう、つまり reduced になってしまうという次の結果が R が縮小写像であることから示せる。

Proposition 5. $x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1)$ とする。この時、ある $N_1 > 0$ が存在して、任意の $N \geq N_1$ に対して $T_\beta^N x$ が *reduced* となるようにすることができる。

以上の Lemma や Proposition より、我々の主定理を得ることができる。

Theorem 6. $x \in [0,1)$ とする。この時、

1. $x \in \mathbb{Q}(\beta) \Leftrightarrow x$ が周期的な β 展開を持つ、
2. $x \in \mathbb{Q}(\beta)$ が *reduced* である $\Leftrightarrow x$ が純周期的な β 展開を持つ。

我々のこれからの課題は、Pisot 数についているこの強い条件をいかにして弱めていくかということである。この結果は、Arnoux 先生と伊藤先生の構成した領域が基本になっているが、この領域が構成できない場合はどうなるか、どのような手法を使ったら良いかという問題になる。

また、境界上はどうなっているか、dual tiling との関係はどうなっているか、など興味深い問題はいくつも残っている。

今回の京都での研究集会は、著者において、とても意味を持つものになりました。様々な面で励まし続けて下さる人に出会えたこと、これはこれからの数学を研究していく著者の人生においてかけがえのないものとなることでしょう。この場をお借りして、多くの方に感謝を申し上げたいと思います。

参考文献

[1] S. Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, Number Theory, Diophantine, Computational and Algebraic Aspects, Edited by K. Györy, A. Pethö and V. T. Sós, 9-21, de Gruyter 1998.

[2] P. Arnoux and Sh. Ito, Pisot substitutions and Rauzy fractals, Prétirage IML **98-18**, preprint submitted.

[3] A. Bertrand, Développements en base de Pisot et répartition modulo 1, C.R. Acad. Sci, Paris **285** (1977), 419-421.

[4] Sh. Ito and Y. Sano, On periodic β-expansions of Pisot Numbers and Rauzy fractals, preprint submitted.

[5] G. Rauzy, Nombres algébriques et substitutions, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147-178.

[6] Y. Sano, On purely periodic beta-expansions of Pisot numbers, preprint submitted.

[7] K. Schmidt, On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers, Bull. London math. Soc., **12** (1980), 269-278.

Yuki Sano (sano@tsuda.ac.jp) Shunji Ito (ito@tsuda.ac.jp)

Department of Mathematics and Computer Science, Tsuda College, 2-1-1,Tsuda-Machi, Kodaira, Tokyo 187-8577, Japan TEL.042-342-5160